Ejercicio 2

Sebastián Jaroszewicz

7 de febrero de 2019

1. Enunciado

Definamos el promedio de una función f como

$$< f >= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx f e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2}}$$

Calcular:

a) $< x >$

b) $< x^2 >$

c) Mostrar que $< x^{2n} >= \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1$

2. Solución

a) Primero calculamos el denominador de la definición de valor medio ya que lo necesitarmos para todos los cálculos. Esto es sencillo porque simplemente reemplazamos la constante a por $\frac{a}{2}$ en la integral que resolvió Javier. Por lo tanto tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

Calculemos ahora el valor medio de x. Para esto tenemos que resolver:

$$< x >= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}$$

Para resolver la integral del denominador podemos ver que el integrando es una función impar, puesto que si reemplazamos x por $-x$ cambia el signo del integrando. Por lo tanto como estamos integrando una función par en un intervalo simétrico alrededor del cero la integral vale 0. Entonces

$$< x >= 0$$

Como corolario podemos agregar que el valor medio de cualquier potencia impar de x será nulo.

$$< x^{2n+1} >= 0$$

b) Acá si tenemos que hacer cuentas ... Pero por suerte ya las hizo Javier en el video. Tenemos que resolver esto

$$< x^2 >= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}$$

El denominador lo calculamos en el item anterior y para el numerador usamos el resultado que obtuvo Javier

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

donde si reemplazamos a por $\frac{a}{2}$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{3/2}}$$

Escribiendo las expresiones para el numerador y el denominador llegamos a

$$< x^2 >= \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{3/2}} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} = \frac{1}{a}$$

c) Ahora intentemos el último a ver si tenemos suerte. Javier en su video propone el "truco" de derivar la integral gausiana con respecto al parámetro a con el objetivo de calcular $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$.

Tratemos de generalizarlo para cualquier potencia par de x. Para esto veamos primero que pasa si calculamos la derivada segunda de la integral.

$$\frac{d^2}{da^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} -x^2 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx$$

Puesto que la derivada nos baja otro $-x^2$ Entonces

$$\frac{d^2}{da^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2}{da^2} \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)$$

Si hacemos la derivada y reemplazamos a por $\frac{a}{2}$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{3\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{5}{2}}}$$

y diviendo por $\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

$$< x^4 >= \frac{3}{a^2}$$

Tratemos pues de generalizar este resultado. Si volvemos a derivar al integrando $x^4e^{-ax^2}$ con respecto al parámetro a obtenemos $-x^6e^{-ax^2}$. Veamos entonces que forma tienen las derivadas sucesivas de $\int_{-\infty}^{\infty} dxe^{-ax^2}$ con respecto a a

Cada vez que derivemos la exponencial nos aparecerá un facto $-x^2$ multiplicando a la misma. Entonces

$$\frac{d^n}{da^n}\left(e^{-ax^2}\right) = (-x^2)^n e^{-ax^2} = (-1)^n x^{2n} e^{-ax^2}$$

Entonces

$$\frac{d^n}{da^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{2n} e^{-ax^2}dx$$

Veamos ahora que pasa con las derivadas de $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$$\frac{d^n}{da^n}\left(\sqrt{\pi}a^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\pi}\left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)\right]a^{-\frac{1}{2}-n}$$

Puesto que cada vez que derivamos tenemos que multiplicar por el exponente yrestar uno del mismo. Arreglando un poco la expresión

$$\frac{d^n}{da^n}\left(\sqrt{\pi}a^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\pi}\left[(-1)^n\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\right]a^{-\frac{1}{2}-n} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{-1}{2}\right)^n 1{\cdot}3{\cdot}5\cdots 2n{-}1\left(\frac{1}{a^n}\right)$$

Si ahora igualamos el valor de la derivada de la integral con esta expresión y notamos que podemos simplificar el factor $(-1)^n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{2a}\right)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1$$

Ya estamos llegando, solo nos queda recordar que tenemos que reemplazar a por $\frac{a}{2}$ puesto que hice las cuentas con las integrales con a en el exponente para usar las soluciones del video) y dividir por el facor de normalización $\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$.

Haciendo esto

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \left(\frac{1}{a^n}\right)1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1$$

lqqd.